

令和4年度一般選抜
個別学力試験問題(後期日程)

数 学

[数 理 科 学 科]

注 意

1. 問題紙は指示があるまで開いてはいけません。
2. 問題紙は2ページ、解答用紙は4枚です。指示があってから確認し、解答用紙の所定の欄に受験番号を記入してください。
3. 解答はすべて解答用紙の所定のところに記入してください。
4. 解答用紙の裏面を使ってはいけません。
5. 各問題とも必ず解答の過程を書き、結論を明示してください。小問に分けられているときは、小問の結論を明示してください。
6. 解答用紙は持ち帰ってはいけません。
7. 試験終了後、問題紙は持ち帰ってください。

□1 $\triangle O_1A_1B$ において、 $O_1A_1 = O_1B = 1$ 、 $A_1B = \sqrt{2}$ とする。頂点 O_1 から辺 A_1B にひいた垂線と辺 A_1B の交点を A_2 とし、点 A_2 を通り辺 O_1A_1 と平行な直線と辺 O_1B との交点を O_2 とする。次に、点 O_2 から線分 A_2B にひいた垂線と線分 A_2B の交点を A_3 とし、点 A_3 を通り線分 O_2A_2 と平行な直線と線分 O_2B との交点を O_3 とする。同様に、 $n = 4, 5, \dots$ に対して、点 A_n 、 O_n を定める。 $\triangle O_nA_nB$ の内接円の面積と半径をそれぞれ S_n 、 r_n とし、辺 O_nA_n の長さを a_n とすると、次の問いに答えよ。

- (1) a_n を求めよ。
- (2) r_n を求めよ。
- (3) $S_1 + 2S_2 + \dots + nS_n$ を求めよ。

□2 座標空間のベクトルに関する次の問いに答えよ。

- (1) 2つのベクトル $\vec{q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ 、 $\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ の両方に垂直な単位ベクトルを1つ求めよ。
- (2) 3つの単位ベクトル \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} は、すべてのベクトル \vec{x} に対し、次の等式をみたすとする。

$$(\vec{a} \cdot \vec{x})^2 + (\vec{b} \cdot \vec{x})^2 + (\vec{c} \cdot \vec{x})^2 = |\vec{x}|^2$$

このとき \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} は、 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 、 $\vec{b} \perp \vec{c}$ 、 $\vec{c} \perp \vec{a}$ であることを示せ。

- (3) 3つの単位ベクトル \vec{d} 、 \vec{e} 、 \vec{f} は、 $\vec{d} \perp \vec{e}$ 、 $\vec{e} \perp \vec{f}$ 、 $\vec{f} \perp \vec{d}$ であるとする。このとき、すべてのベクトル \vec{x} に対し、次の等式が成り立つことを示せ。

$$(\vec{d} \cdot \vec{x})^2 + (\vec{e} \cdot \vec{x})^2 + (\vec{f} \cdot \vec{x})^2 = |\vec{x}|^2$$

□3 θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ をみたす定数とする。座標平面上の曲線 C が、媒介変数 t を用いて

$$x = (v \cos \theta)t, \quad y = (v \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (t \text{ は実数})$$

と表されている。ここで、 v, g は正の定数である。次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C 上の y 座標が最大である点の座標を求めよ。
- (2) 曲線 C は x 軸の正の部分とただ1つの点で交わることを示せ。また、その交点の x 座標を求めよ。
- (3) (2) で求めた x 座標を最大にする θ の値を求めよ。

□4 次の問いに答えよ。ただし、対数は自然対数とする。

- (1) 関数 $f(x) = \frac{\log x}{x}$ について増減、極値、凹凸を調べ、そのグラフの概形をかけ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ を用いてよい。
- (2) a を正の実数とするとき、不等式

$$\frac{\log a}{a} < \frac{2}{3} \log 2$$

が成り立つことを示せ。ただし、自然対数の底 e に対し、 $e > 2.7$, $\log 2 > 0.6$ を用いてよい。

- (3) 自然数 p, q, r の組で

$$p^{3q}q^{3p} = r^{2pq} \quad \text{かつ} \quad r \geq 3$$

をみたすものをすべて求めよ。